SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. ZANGHIRATI

# REGOLARITA' MICROLOCALE ED ITERATI DI OPERATORI

17 GIUGNO 1982

# REGOLARITA' MICROLOCALI ED ITERATI DI OPERATORI

In questo seminario verranno presentate alcune generalizzazioni del "teorema degli iterati" di Katake-Narasimhan che hanno portato interessanti sviluppi nell'analisi microlocale delle singolarità di una distribuzione.

I primi risultati in tale direzione sono stati ottenuti da Bolley-Comus-Matterà [11], i quali hanno introdotto la nozione di "fronte d'onda rispetto gli iterati di un operatore P e la classe di Gevrey $G^{\sigma}$".

Cominceremo col richiamare, anche se ben nota, la definizione di funzione Gevrey.

1. Definizione. Sia $\Omega$ un sottoinsieme aperto di $R^n$, $6 > 1$, $q = (q_1,\dots,q_n) \in R^n$, $\min_{1\leqslant j\leqslant n} q_j = 1$. Una funzione u indefinitamente differenziabile in $\Omega$ appartiene alla classe di Gevrey $G^{\sigma q}(\Omega)$ se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $c_k$ tale che:

$$\sup_k |D^{\alpha}u| \leq c_k \,(c_k < \alpha,\, q >^{\sigma})^{<\alpha,q>} \quad , \qquad \alpha \in Z^n_+ \ ,$$

o, equivalentemente, per noti teoremi di immersione:

$$(1) \qquad \|D^{\alpha}u\|_{L^2(K)} < c_k(c_k \langle\alpha,\, q\rangle^{\sigma})^{\langle\alpha,q\rangle} \qquad \alpha \in Z^n_+ \ ,$$

ove $\langle\alpha,\, q\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, q_j$ .

Se $q_j = 1$ per $j = 1,\dots,n$, scriveremo $G^{\sigma}(\Omega)$ in luogo di $G^{\sigma(1,\dots,1)}(\Omega)$. Chiaramente $G^1(\Omega) = A(\Omega)$, lo spazio delle funzioni anali-

tiche in $\Omega$.

Supporremo che le componenti di $q$ siano razionali. Allora $q$ si potrà scrivere nella forma: $q = (\frac{m}{m_1},\ldots,\frac{m}{m_n})$, con $m_j \in Z_+$, $m$ = minimo comun multiplo dei numeratori dei $q_j$.

Gli spazi $G^{\sigma q}$ possono essere descritti utilizzando la trasformata di Fourier. Si ha infatti la seguente:

2. Proposizione. Sia $u$ $\mathcal{D}'(\Omega)$. Allora $u \in G^{\sigma q}$ in un intorno di un punto $x_o \in \Omega$ se e solo se esiste un intorno $U$ di $x^o$ ed una successione $\{u_N\}$ limitata in $E'(\Omega)$ tale che:

$$u_N = u \qquad \text{in } U, \qquad N = 1,2,\ldots$$

$$(2) \qquad |\hat{u}_N(\xi)| < C(C\,N^\sigma/|\xi|_q)^{m\,N} \qquad N = 1,2,\ldots\ , \qquad \xi \in R^n\setminus\{0\},$$

dove $C$ è una costante positiva, $|\xi|_q = (\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{2/q_j})^{\frac{1}{2}}$ e $\hat{u}$ è la trasformata di Fourier di $u$.

Nel caso $q_j = 1$, $j = 1,\ldots,n$, la (2) si scrive:

$$(2') \qquad |\hat{u}_N(\xi)| < C(C\,N^\sigma/|\xi|)^N \qquad N = 1,2,\ldots\ , \qquad \xi \in R^n\setminus\{0\}.$$

Se $u$ non appartiene a $G^\sigma(V)$ per un qualche intorno $V$ di un punto $x^o$, si possono ottenere delle informazioni sulla struttura delle singolarità di $u$ in $x^o$, esaminando le direzioni nelle quali (2') non è soddisfatta.

Ciò porta alla seguente definizione del *fronte d'onda* $WF_\sigma(u)$ di $u$ *rispetto alla classe di Gevrey* $G^\sigma$:

3. <u>Definizione</u>. Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ed $(x^o, \xi^o) \in \Omega \times R^n \setminus \{0\}$. $(x^o, \xi^o) \notin WF_\sigma(u)$ se esiste un intorno aperto $U$ di $x^o$ contenuto in $\Omega$, un intorno conico aperto $\Gamma$ di $\xi^o$ contenuto in $R^n \setminus \{0\}$ ed una successione $\{u_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ tale che:

i) $u_N = u$ in $U$, $N = 1,2,\dots$

ii) $\{u_N\}$ è limitato in $\mathcal{E}'(\Omega)$

iii) $|\hat{u}_N(\xi)| < C(C\, N^\sigma/|\xi|)^N$ $N = 1,2,\dots,$ $\xi \in \Gamma$

dove $C$ è una costante positiva.

Se $P(x, D)$ è un operatore differenziale lineare di ordine $m$ a coefficienti in $G^\sigma(\Omega)$, si definisce lo spazio $G^\sigma(\Omega; P)$ dei *vettori Gevrey* di ordine $\sigma$ di $P$ nel modo seguente:

4. <u>Definizione</u>. Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\sigma \geq 1$, $s \in R$. $u \in G^\sigma_s(\Omega; P)$ se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $c_k$ tale che:

$$\|P^N u\|_{H^s(K)} \leq c_k (c_k\, N^\sigma)^{m\,N} \qquad N = 0,1,\dots$$

dove $H^s$ denota l'usuale spazio di Sobolev di ordine $s$ e $P^N$ l'N-mo iterato di $P$. Si pone poi:

$$G^\sigma(\Omega; P) = \bigcup_{s \in R} G^\sigma_s(\Omega; P).$$

Per gli spazi $G^\sigma(\Omega; P)$ si ha una caratterizzazione analoga a quella data sopra per le classi $G^\sigma(\Omega)$ (v. Proposizione 2). Si ha infatti:

5. <u>Proposizione</u>. Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ed $x^o \in \Omega$. Esiste un intorno $V$ di $x^o$ tale che $u \in G^\sigma(V; P)$ se e solo se esiste un intorno $U$ di $x^o$, $U \subset\subset V$, ed una suc-

cessione $\{f_N\} \subset \mathcal{E}'(V)$ tale che:

$$f_N = P^N u \qquad \text{in } U \qquad\qquad N = 0,1,\ldots$$

(3) $$|\hat{f}_N(\xi)| < C\,(C\,N^{\sigma})^{m\,N}\,(1+|\xi|)^M \qquad N = 0,1,\ldots, \qquad \xi \in R^n ,$$

dove $C > 0$ ed $M \in R$ sono costanti opportune.

Se u non appartiene a $G^{\sigma}(V;\,P)$ per un intorno V di $x^o$ si possono ottenere informazioni sulla singolarità di u in $x^o$ esaminando le direzioni per le quali (3) non è soddisfatta. Ciò conduce alla seguente definizione di *fronte d'onda rispetto a* $G^{\sigma}$ *ed agli iterati di* P:

6. Definizione. Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $(x^o, \xi^o) \in \Omega \times R^n\setminus\{0\}$, P un operatore di ordine m a coefficienti in $\Omega$. $(x^o, \xi^o)$ è nel complementare del fronte d'onda $WF_{\sigma}(u;\,P)$ di u rispetto a $G^{\sigma}$ ed agli iterati di P se e solamente se esiste un intorno aperto U di $x^o$, un intorno aperto conico $\Gamma$ di $\xi^o$ contenuto in $R^n\setminus\{0\}$ ed una successione $\{f_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ tale che:

j) $f_N = P^N u$ in U

jj) $|\hat{f}_N(\xi)| < C(C\,N^{\sigma} + |\xi|)^{Nm+M}$, $N = 0,1,\ldots$, $\xi \in R^n$

jjj) $|\hat{f}_N(\xi)| < C(C\,N^{\sigma})^{Nm}\,(1+|\xi|)^M$, $N = 0,1,\ldots$, $\xi \in \Gamma$,

dove $M \in R$ e $C > 0$ sono costanti opportune.

Per le proiezioni di $WF_{\sigma}(u)$ e di $WF_{\sigma}(u;\,P)$ su $\Omega$ si prova la seguente:

7. Proposizione. La proiezione di $WF_{\sigma}(u)$ su $\Omega$ è il complementare in $\Omega$ del più grande aperto $\Omega' \subset \Omega$ tale che $u \in G^{\sigma}(\Omega')$. Analogamente, la proiezio-

ne di $WF_\sigma(u; P)$ su $\Omega$ è il complementare del più grande aperto $\Omega' \subset \Omega$ tale che $u \in G^\sigma(\Omega'; P)$.

Le relazioni che intercorrono fra $WF_\sigma(u)$ e $WF_\sigma(u; P)$ è stabilito dal seguente:

8. Teorema [11]. Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e P un operatore differenziale a coefficienti in $G^\sigma(\Omega)$. Allora:

$$WF_\sigma(u; P) \subset WF_\sigma(P\,u) \subset WF_\sigma(u) \tag{4}$$

Inoltre:

$$WF_\sigma(u) \subset WF_\sigma(u; P) \cup \{(x,\xi) \in \Omega \times R^n \setminus \{0\} : P_m(x,\xi) = 0\}, \tag{5}$$

dove $P_m$ è la parte principale di P.

Il teorema 8 è stato provato da Bolley-Camus-Matterà per classi più ampie delle classi Gevrey: le classi $C^L$ di funzioni quasi analitiche e non quasi analitiche, per la cui definizione si può ad esempio vedere [16]. In [10] poi Bolley e Camus hanno ulteriormente approfondito l'indagine microlocale.

Per le classi di Gevrey anisotrope $G^{\sigma q}(\Omega)$ è stato provato un risultato analogo al teorema 8. A tale scopo sono stati definiti, modificando opportunamente le definizioni 3 e 6, il fronte d'onda $WF_{\sigma q}(u)$ di u rispetto la classe $G^{\sigma q}$ ed il fronte d'onda $WF_{\sigma q}(u; P)$ di u rispetto a $G^{\sigma q}$ ed agli iterati di P[1]. Il risultato ottenuto è il seguente:

---

(1) Per le proiezioni su $\Omega$ di $WF_{\sigma q}(u)$ e di $WF_{\sigma q}(u; P)$ vale una Proposizione analoga alla 7.

9. Torema [25]. Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $P(x, D)$ un operatore e coefficienti in $G^{\sigma q}(\Omega)$, $\sigma > 1$. Allora:

$$WF_{\sigma q}(u; P) \subset WF_{\sigma q}(Pu) \subset WF_{\sigma q}(u) \tag{6}$$

$$WF_{\sigma q}(u) \subset WF_{\sigma q}(u; P) \cup \{(x,\xi) \in \Omega \times R^n \setminus \{0\}: P_o(x,\xi) = 0\}, \tag{7}$$

dove $P_o(x, \xi)$ è la parte di $P(x, \xi)$ q-omogenea di grado massimo.

Da (6) e (7) segue subito:

10. Corollario. Con le notazioni del Teorema 9:

$$WF_{\sigma q}(u) \subset WF_{\sigma q}(Pu) \cup \{(x,\xi) \in \Omega \times R^n \setminus \{0\}: P_o(x,\xi) = 0\}, \tag{8}$$

risultato che può riguardarsi come la versione microlocale di un noto teorema di regolarità Gevrey per le soluzioni di un'equazione quasi-ellettica [22].

Se $q_j = 1$ per $j = 1,\ldots,n$, (6) e (7) si riducono a (4) e (5) rispettivamente, mentre (8) ridà il teorema di regolarità di Hörmander [16]:

$$WF_{\sigma}(u) \subset WF_{\sigma}(Pu) \cup \{(x,\xi) \in \Omega \times R^n \setminus \{0\}: P_m(x,\xi) = 0\}.$$

Esempi, anche molto semplici, di operatori consentono di verificare che (7) può fornire, circa la regolarità Gevrey di una distribuzione, informazioni più complete di quelle fornite da (5). Ad esempio, se $P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}$, e $q = (1,2)$, da (7) segue:

$$WF_{\sigma(1,2)}(u) \subset WF_{\sigma(1,2)}(u; P); \tag{9}$$

mentre da (5) si ha:

$$(10) \qquad WF_\sigma(u) \subset WF_\sigma(u;\ P) \cup \{(x,t;\ 0,\tau) : (x,t) \in R^2,\ \tau \in R\setminus\{0\}\}.$$

Pertanto se $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t})u = 0$ la (9) assicura che $WF_{\sigma(1,2)}(u) = \emptyset$, mentre la (10) non fornisce nessuna informazione circa la regolarità Gevrey locale di u.

Per proiezione su $\Omega$, da (6) si deduce, quale che sia P:

$$G^{\sigma q}(\Omega) \subset G^{\sigma q}(\Omega;\ P).$$

Supponiamo P q-quasiellittico in $\Omega$; ciò è quanto dire che P si lascia scrivere nella forma:

$$P(x,\ D) = \sum_{\langle\alpha,q\rangle=m} a_\alpha(x)\ D^\alpha \qquad x \in \Omega$$

e verifica:

$$\sum_{\langle\alpha,q\rangle=m} a_\alpha(x)\ \xi^\alpha \neq 0 \qquad \forall(x,\ \xi) \in \Omega \times R^n\setminus\{0\}.$$

Allora da (6) e (7) si ottiene:

$$WF_{\sigma q}(u) = WF_{\sigma q}(u;\ P)$$

e, per proiezione su $\Omega$:

$$G^{\sigma q}(\Omega) = G^{\sigma q}(\Omega;\ P).$$

La definizione di $G^{\sigma q}(\Omega;\ P)$ coincide con quella di $G^\sigma(\Omega;\ P)$ (Definizione

4) qualora si ponga in luogo di m, il q-grado di $P(x, \xi)$. Poiché per un operatore q-quasiellittico il q-grado è uguale al grado, si ha $G^{\sigma q}(\Omega; P) = G^{\sigma}(\Omega; P)$ e quindi:

11. Teorema [23], [24]. Se $P(x, D)$ è q-quasiellittico ed ha coefficiente in $G^{\sigma q}(\Omega)$, allora;

$$G^{\sigma q}(\Omega) = G^{\sigma}(\Omega; P).$$

In particolare se $q_j = 1$ per $j = 1,\ldots,n$, si riottiene il "teorema degli iterati ellittici" di Lions e Magenes:

12. Teorema [18]. Se $P(x, D)$ è ellittico in $\Omega$ ed ha coefficienti in $G^{\sigma}(\Omega)$, $\sigma \geqslant 1$, allora:

$$G^{\sigma}(\Omega; P) = G^{\sigma}(\Omega).$$

Questo, con $\sigma = 1$ non è altro che il ben noto teorema di Katake-Narasimhan:

13. Teorema [17]. Se $P(x, D)$ è ellittico in $\Omega$ ed ha coefficienti in $A(\Omega)$; allora:

$$G^{1}(\Omega; P) = A(\Omega).$$

I Teoremi 11, 12 e 13, che abbiamo qui ottenuto come corollari del Teorema 9 sono stati provati indipendentemente dalla nozione di fronte d'onda, con dimostrazioni che seguono le linee del primo di essi: quel

lo di Katake e Narasimhan. Tale teorema ha avuto molte altre estensioni oltre quelle sopracitate: è infatti stato esteso ad operatori pseudodifferenziali [13], a certe classi di operatori ellittici degeneri [2], [4], [6], a classi di operatori ipoellittici [8], a campi di vettori [21], [14], a sistemi di operatori [9]. Le applicazioni vertono sulla teoria spettrale [1], [5], sull'approssimazione polinomiale di funzioni $C^\infty$ ed analitiche [3], su diseguaglianze di tipo Bernstein [7], su teoremi di regolarità analitica e Gevrey [20], [3], [5].

E' stato poi anche studiato il problema di determinare in quale misura l'ipotesi di q-quasiellitticità è necessaria all'inclusione $G^\sigma(\Omega; P) \subset G^{\sigma q}(\Omega)$. Esso appare completamente risolto nel caso $\sigma > 1$. Si ha infatti:

14. Teorema 24 . Sia $\sigma > 1$ e P a coefficienti in $G^{sq}(\Omega)$, $\sigma > s \geqslant 1$. Allora:

(11) $$G^\sigma(\Omega; P) = G^{\sigma q}(\Omega) \Rightarrow P \text{ q-quasiellittico in } \Omega.$$

La (11) nel caso $q_j = 1$ per $j = 1,\dots,n$ è stata provata da Metivier [20]. Se $\sigma = 1$ e $q_j = 1$ per $j = 1,\dots,n$, vari esempi consentono di provare che l'implicazione è falsa. Un esempio particolarmente semplice è fornito dall'operatore di Legendre: $P = \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}$ in $\Omega = ]-1,1[$ - Dunque

$$G^1(\Omega; P) = A(\Omega) \not\Rightarrow P \text{ ellittico in } \Omega.$$

Baouendi e Metivier [8] hanno poi provato che si ha:

(12) $$G^1(\Omega; P) = A(\Omega)$$

per ogni operatore P di tipo principale[(1)] ipoellittico.

(1) Un polinomio $P(x,\xi)$ dicesi di tipo principale in $\Omega$ se la sua parte principale $P_m(x,\xi)$ verifica:

$$|P_m(x,\xi)| + \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x,\xi)\right| \neq 0 \qquad (x,\xi) \in \Omega \times R^n \setminus \{0\}.$$

La validità di (12) per certi operatori ellittici degeneri in un dominio $\Omega$ chiuso e limitato è stato provato da Baouendi-Goulaouic--Hanouzet [2], [4], [5]. Essi considerano un operatore P di ordine 2 in un aperto $\mathring{\Omega}$ limitato e con frontiera regolare a tratti; P è supposto ellittico in $\mathring{\Omega}$, degenere di ordine 1 su $\partial\Omega$ in direzione normale, ed appare come una generalizzazione dell'operatore di Legendre. I sopracitati autori provano allora che i vettori Gevrey d'ordine $\sigma$ di P coincidono con certi spazi che risultano di interpolazione fra $C^\infty(\bar{\Omega})$ ed $A(\bar{\Omega})$ e che per $\sigma = 1$ coincidono con $A(\bar{\Omega})$.

Completamente aperto appare il problema degli iterati per operatori quasiellittici degeneri.

Sono infine da citare alcuni risultati che caratterizzano le funzioni Gevrey anzicché mediante valutazione degli iterati di un operatore, mediante valutazioni di polinomi omogenei, non commutativi, di campi di vettori analitici.

Sia $X = (X_1,\dots,X_p)$ un sistema di campi di vettori reali a coefficienti analitici definiti in un aperto $\Omega$ di $R^n$. Si pone:

$$X^\alpha = X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_l} \quad \text{con } \alpha_j \in \{1,\dots,p\}, \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_l), \ |\alpha| = l$$

e si indica con $G^\sigma(\Omega; X)$, $\sigma \geqslant 1$, la classe delle $u \in C^\infty(\Omega)$ tali che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $c_k > 0$ per la quale riesca per ogni $\alpha$:

$$\| X^\alpha u \|_{L^2(K)} < c_k^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^\sigma .$$

Se $p = n$ ed i campi $X_i$ sono linearmente indipendenti in ogni punto di $\Omega$, si dice che il sistema di campi è ellittico.

In un lavoro che risale al 1960, quindi precedente il teorema di Katake-Narasimhan, Nelson [21] ha provato:

15. <u>Teorema</u>. Se $X = (X_1,\dots,X_n)$ è un sistema di campi ellittico in $\Omega$, allora:

$$G^1(\Omega; X) = A(\Omega).$$

(Nel caso che $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ il teorema ridà la definizione di $A(\Omega)$).

In [13] Damlakhi ha dimostrato il teorema più fine:

16. <u>Teorema</u>. Sia $(X_1,\dots,X_n)$ un sistema di campi ellittico in $\Omega$ e sia $u \in C^\infty(\Omega)$. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

i) $u \in A(\Omega)$

ii) per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $c_k > 0$ tale che per $j = 1,\dots,n$ e per ogni $h$:

$$\|X_j^h u\|_{L^2(K)} < c_k^{h+1}\, h\,!$$

Quando $X_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, il teorema è dovuto a Browder [12].

Damlakhi stesso ed Helffer [14] hanno poi considerato il problema degli iterati per un sistema non ellittico di campi esaminando se il Teorema 15 rimane valido per un sistema di campi $X_1,\dots,X_p$ che verifica la condizione di Hörmander:

$(C.H.)_r$ i campi $X_i$ ed i loro prodotti di Lie di ordine $< r$ generano in ogni punto $x$ lo spazio tangente $T_x\,\Omega$.

Il risultato ottenuto fornisce una risposta positiva nel caso in cui i campi $X_i$ generano un'algebra di Lie stratificata, nilpotente di rango $r$, cioè un'algebra $G$ che ammette la decomposizione:

$$G = G_1 \oplus \dots \oplus G_r$$

con $[G_1, G_j] = [G_{j+1}]$ per $1 < j < r$; $[G_1, G_r] = 0$. Si ha infatti:

17. Teorema. Se $X_1,\dots,X_p$ verificano $(C.H.)_r$ e generano un'algebra stratificata di rango r, allora;

$$G^s(\Omega; X) \subset G^{1+(s-1)r}(\Omega) , \qquad s > 1$$

(Quindi per s = 1, $G^1(\Omega, X) \subset A(\Omega)$).

BIBLIOGRAFIA

[1] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC, Regularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 34, (1969), p. 361-379.

[2] — , Etude de l'analyticité et de la regularité Gevrey pour une classe d'operateurs elliptiques dégénérés; Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. (4), 4, (1971), p. 31-46.

[3] — , Approximation polynomiale de fonctions $C^\infty$ et analytiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 21, 4, (1971), p. 149-173.

[4] — , Regularité analytiques et itérés d'operateurs elliptiques dégénérés. Applications, J. Func. Anal., 9, (1972), p. 208-248.

[5] — , Iterés d'operateurs elliptiques et prolongement de fonctions propres, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 14, (1973), p. 1495-1501.

[6] M.S. BAOUENDI, C. GOULACUIC, B. HANOUZET, Caractérisations de classes de fonctions $C^\infty$ et analytiques sur une variété irrégulière a l'aide d'une operateur differentiel, J. Math. Pures et Appl., 52, (1973), p. 115-144.

[7] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC, Approximation of analytic functions on compact sets and Bernstein's inequality, Transact. Am. Math. Soc., 189, (1974), p. 251-261.

[8] M.S. BAOUENDI, G. METIVIER, Caractérisation de l'analyticité et itérés d'opérateurs hypoelliptiques de type principal, Seminaire Goulaonic-Schwartz, 1979-1980, exposé n. 12.

[9] P. BOLLEY, J. CAMUS, Power and Gevrey's regularity for a system of differential operators, Seminaire Math. Univ. de Rennes (1977-78).

[10] — , Regularité Gevrey et itérés pour une classe d'operateurs ipoel-

liptiques. Comm. in Part. Diff. Eq., 6, (1981), p. 1057-1110.

[11] P. BOLLEY, J. CAMUS, C. MATTERA, Analiticité microlocale et itérés d'opérateurs, Sem. Goulaonic-Schwartz, (1978-79), Expose n. XIII.

[12] F. BROWDER, Real analytic functions on product space and separate analyticity, Canadian J. Math., 13, (1961), p. 650-656.

[13] M. DAMLAKHI, Analiticité et itérés d'operateurs pseudodifferentials, J. Math. Pure et Appl., 58, (1979), p. 63-74.

[14] M. DAMLAKHI, B. HELFFER, Analyticité et itérés d'un système de champs non elliptique, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup., 13, (1980), p. 397-403.

[15] M. DERRIDJ, C. ZUILY, Regularité analytique et Gevrey d'opérateurs elliptiques dégénérés, J. Math. Pures et Appl., 52, (1973), p. 65-80.

[16] L. HORMANDER, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure, Appl. Math., 24, (1971), p. 671-704.

[17] T. KOTAKE, M.S. NARASIMHAN, Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator, Bull. Soc. Math. France, 90, (1962), p. 449-471.

[18] J.L. LIONS, E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogenes et applications, vol. III, Dunod, Paris 1970.

[19] G. METIVIER, Vecteurs analytiques et Gevrey d'operateurs autoadjoints, C.R.A.S., 285, (1977), p. 609-611.

[20] — , Proprieté des itérés et allipticité, Comm. Port. Diff. Equezions, 3, (1978), p. 827-876.

[21] F. NELSON, Analytic vectors, Ann. of Math., 70, (1959), p. 572-613.

[22] L.P. VOLEVIC, Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi ellittici, Mat. Sbornik 59, (1962), pp. 3-52.

[23] L. ZANGHIRATI, Iterati di operatori quasi-ellittici e classi di Gevrey, Ball. U.M.I. 18-B, (1981), p. 411-428.

[24] — , Complementi al teorema degli iterati quasi-ellittici. Boll. U.M.I., 1-A, (1982), p. 137, 143.

[25] — , Iterati di operatori e regolarità Gevrey microlocale enisotropa. Rend. Sem. Mat., 67, (1982).